

ЛЕКЦІЯ №5. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ СТРУКТУР

5.1. Відсутність дисипативних структур у системах з однією змінною, які описуються диференціальними рівняннями другого порядку

Почнемо вивчення дисипативних структур на прикладі системи з однією змінною. Покажемо, що в системах, які описуються рівняннями другого порядку, стійкі дисипативні структури не виникають. Цей результат важливий для аналізу виникнення дисипативних структур, а метод його отримання буде в подальшому використано для вивчення дисипативних структур у більш складних системах, в яких, ці структури є стійкими.

Просторові і часові залежності динамічної змінної для системи з однією змінною для широкого кола задач описуються розв'язком рівняння

$$\frac{\partial X(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta X(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{X}), \quad (5.1)$$

де $f(\mathbf{X})$ – нелінійна функція аргументу.

Рівняння (5.1) формально може бути записане у вигляді

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\delta U[X(\mathbf{r}, t)]}{\delta X(\mathbf{r}, t)}, \quad (5.2)$$

де $\delta U/\delta X$ – функціональна похідна (більш детально функціональна похідна буде проаналізована в розділі 8), а функціонал визначається такою формулою

$$U(X) = \int \left\{ V[X(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} D(\vec{\nabla} X)^2 \right\} d\mathbf{r}, \quad (5.3)$$

$$V(X) = -\int_0^X f(X') dX'. \quad (5.4)$$

З (5.2) видно, що стаціонарним станам рівняння (5.1) відповідають екстремуми функціонала $U(X)$, а стійким станам – мінімуми функціонала.

Спочатку проведемо дослідження стійкості для конкретного вигляду функції $f(X)$. Нехай вона має N -подібний вигляд (рис. 5.1). Припустимо, що граничні умови до рівняння (5.1) мають вигляд $\vec{\nabla}X = 0$ на межі системи. Точки $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$ є стаціонарними точками однорідного розв'язку рівняння (5.1), причому точки $X^{(1)}, X^{(3)}$ є стійкими, $X^{(2)}$ – нестійка точка. Функція $V(X)$, що зв'язана з $f(X)$ рівнянням (5.4), також зображена на рис. 5.1. Вона має мінімуми в стійких точках. Довільне просторове збурення призведе до зростання функції $U(X)$. Дійсно, перший член в (5.3) зростає

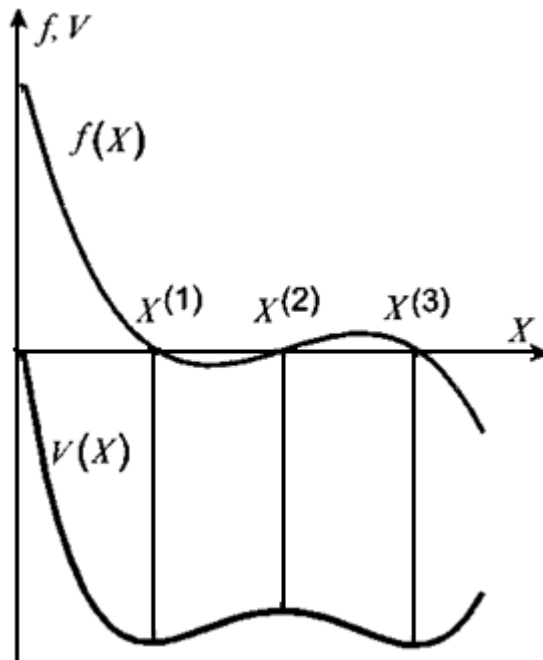


Рис. 5.1. Залежності $f(X)$ і $V(X)$

внаслідок того, що відхилення відбувається в околі мінімуму V , другий член дорівнює нулю в однорідному випадку і додатний для довільного неоднорідного розподілу. Тому стаціонарні однорідні стани є стійкими стосовно просторових збурень. Можна показати, що неоднорідні розв'язки (5.1) є нестійкими. Якісно це впливає з таких міркувань. Для неоднорідного розподілу наближення значення $X(r)$ до $X^{(1)}$ зумовлює зменшення V і, отже, функціоналу U . Також при зменшенні неоднорідності член $D(\vec{\nabla}X)^2$

буде зменшуватися, що також зменшує U . Це означає нестійкість неоднорідного стану.

Підтвердимо цей результат кількісними розрахунками для одновимірного випадку. Припустимо, що ми знайшли неоднорідний стаціонарний розв'язок рівняння (5.1), який описується функцією $X_0(z)$.

Цей розв'язок задовольняє рівнянню

$$D \frac{d^2 X_0(z)}{dz^2} + f(X_0) = 0 \quad (5.5)$$

з граничною умовою

$$\frac{dX_0}{dz} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, d, \quad (5.6)$$

де точки 0 і d визначають межі системи.

Для дослідження стійкості цього розв'язку розглянемо поведінку флуктуації динамічної змінної

$$\delta X(z, t) = X(x, t) - X_0(z).$$

Шукатимемо розв'язок для флуктуації у вигляді

$$\delta X(X, t) = \psi(z) \exp(-Et). \quad (5.7)$$

З (5.1) матимемо для ψ рівняння

$$-D \frac{d^2 \psi}{dz^2} - \frac{df(X_0)}{dX_0} \psi = E\psi. \quad (5.8)$$

Згідно з (5.7) розв'язок $X_0(z)$ є стійким, якщо для всіх розв'язків рівняння (5.8) $E > 0$.

Вигляд рівняння (5.8) збігається з рівнянням Шредінгера для частинки, що рухається в зовнішньому полі, потенціал якого дорівнює $-\frac{df}{dX_0}$. Умова для стійкості розв'язку $X_0(z)$ відповідає вимозі того, аби спектр енергії такої частинки був позитивний. Продиференціюємо рівняння (5.5) по z

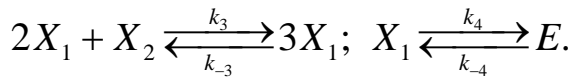
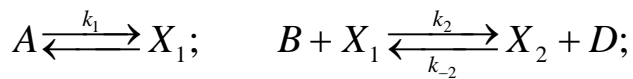
$$-D \frac{d^2}{dz^2} \frac{dX_0(z)}{dz} - \frac{df}{dX_0} \frac{dX_0(z)}{dz} = 0. \quad (5.9)$$

Порівнюючи рівняння (5.8) і (5.9), бачимо, що одним з розв'язків рівняння (5.8) є похідна від стаціонарного розв'язку, тобто функція $\psi = \frac{dX_0}{dz}$ з власним значенням $E = 0$. Оскільки на границі системи $\frac{dX_0}{dz} = 0$, функція $X_0(z)$ повинна мати один або більше число екстремумів. Тоді функція $\psi = \frac{dX_0}{dz}$ повинна принаймні один раз змінювати знак в області зміни аргументу в межах $0 < z < d$. Згідно з відомою теоремою (див. наприклад [71]) це значить, що розв'язок $\psi = \frac{dX_0}{dz}$ з $E = 0$ відповідає збудженому стану (оскільки хвильова функція основного стану не має вузлів, тобто не обертається в нуль). Отже, існують стани з іншими значеннями E , тобто зі значенням $E < 0$. Тоді згідно з (5.7) неоднорідний розв'язок $X_0(z)$ є нестійким. Таким чином, система повинна релаксувати до однорідного стану. Цим неоднорідним станом може бути стан $X = X^{(1)}$ який відповідає абсолютному мінімуму, або стан $X = X^{(3)}$, який відповідає відносному мінімуму. Отже, в розглядуваній системі, динаміка якої визначається рівнянням (5.1), стійких неоднорідних станів не існує.

5.2. Модель хімічної реакції «брюсселятор»

Модель Пригожина–Лефевра–Ніколіса («брюсселятор») [4] використовується для вивчення автоколивань і просторових структур у хімічних реакціях. Для пояснення реальних явищ модель є досить грубою, проте простота моделі дозволяє зробити якісні висновки про поведінку реакцій при зміні параметрів системи.

Ланцюжок реакцій в моделі «брюсселятор» має такий вигляд:



Коефіцієнти k_i і k_{-i} ($i = 1, 2, 3, 4$) визначають швидкості прямої та зворотної i -ої реакції; A і B – речовини, які вступають в реакцію; D і E – продукти реакції.

В подальшому будемо вважати, що речовини A і B рівномірно надходять в систему, а D і E миттєво виводяться. Тоді концентрація компонент A і B є сталою, а концентрація компонент D і E дорівнює нулю. Отже, динамічними змінними системи є компоненти X_1 і X_2 , рівняння для яких з урахуванням можливої дифузії має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial t} &= k_1 A - (k_2 B + k_4) X_1 + k_3 X_1^2 X_2 + D_1 \Delta X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= k_2 B X_1 - k_3 X_1^2 X_2 + D_2 \Delta X_2, \end{aligned} \quad (5.10)$$

де D_1, D_2 – коефіцієнти дифузії компонент. Після введення безрозмірних змінних рівняння (5.10) можуть бути приведені до вигляду:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = A - (\lambda + 1) X_1 + X_1^2 X_2 + D_1 \Delta X_1, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial t} = \lambda X_1 - X_1^2 X_2 + D_2 \Delta X_2. \quad (5.12)$$

Будемо розв'язувати задачу для граничних умов двох типів:

а) задані концентрації на границі

$$X_1 = A, \quad X_2 = \lambda/A. \quad (5.13)$$

б) відсутні потоки на границі

$$\vec{\nabla} X_{1|_s} = \vec{\nabla} X_{2|_s} = 0. \quad (5.14)$$

Система рівнянь (5.11), (5.12) має стаціонарний розв'язок $X_1^0 = A$, $X_2^0 = \lambda/A$. Для дослідження його стійкості введемо флуктуації:

$$\begin{aligned} X_1 &= A + x_1, \\ X_2 &= \frac{\lambda}{A} + x_2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Для x_1 і x_2 з (5.11), (5.12) отримаємо таку систему рівнянь

$$\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} = \tilde{L} \vec{x}, \quad (5.16)$$

де матриця \tilde{L} становить

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 + D_1 \Delta & A^2 \\ -\lambda & -A^2 + D_2 \Delta \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Власні значення (5.16) визначаються з рівняння

$$\tilde{L} \mathbf{u} = p \mathbf{u}. \quad (5.18)$$

Розв'язки рівняння (5.18), які задовольняють граничним умовам, шукаємо у вигляді

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \sin \frac{\pi m z}{d} \quad \text{для випадку а)}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \sin \frac{\pi m z}{d} \quad \text{для випадку б)}, \quad (5.20)$$

де m – ціле число; \mathbf{u} – вектор з компонентами u_1 і u_2 .

Окремі розв'язки характеризуються індексом m . Тому покладемо $p \equiv p_m$ $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_m$.

Компоненти $\mathbf{u}_m^0 [u_{1m}^0, u_{2m}^0]$ задовольняють системі рівнянь

$$\begin{aligned} \left[\lambda - 1 - D_1 \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 \right] u_{1m}^0 + A^2 u_{2m}^0 &= p_m u_{1m}^0, \\ -\lambda u_{1m}^0 + \left[-A^2 - D_2 \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2 \right] u_{2m}^0 &= p_m u_{2m}^0 \end{aligned}$$

Ця система має нетривіальні розв'язки, якщо

$$p_{m\pm} = \frac{1}{2} \left[a_m - b_m \pm \sqrt{(a_m + b_m)^2 - 4A^2 \lambda} \right], \quad (5.21)$$

де

$$a_m = \lambda - 1 - D_1 \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2, \quad (5.22)$$

$$b_m = A^2 + D_2 \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2. \quad (5.23)$$

При цьому

$$\frac{u_{2m}^0}{u_{1m}^0} = \frac{p_m - (\lambda - 1) + D_1 \left(\frac{\pi m}{d} \right)^2}{A^2}, \quad (5.24)$$

Однорідний розв'язок є стійким, якщо всі власні значення (5.21) від'ємні.

Корені p_{\pm} комплексні при виконанні умови

$$(a_m - b_m)^2 < 4A^2\lambda,$$

або з урахуванням (5.22), (5.23), якщо

$$\left[\lambda + A^2 - 1 + \frac{\pi^2 m^2}{d^2} (D_1 - D_2) \right]^2 < 4A^2\lambda \quad (5.25)$$

Значення параметрів, при яких дійсне значення комплексного кореня приймає нульове значення, визначає біфуркацію періодичних у часі розв'язків. Як випливає з (5.21), така нестійкість реалізується при

$$a_m - b_m > 0, \quad \lambda > A^2 + 1 + \frac{\pi^2 m^2}{d^2} (D_1 + D_2). \quad (5.26)$$

Критичне значення λ_{tc} дорівнює

$$\lambda_{tcm} = A^2 + 1 + \frac{\pi^2 m^2}{d^2} (D_1 + D_2). \quad (5.27)$$

Залежність λ_{cm} від m представлена на рис. 5.2. При збільшенні λ перша біфуркація періодичних у часі розв'язків здійснюється при $m = 0$ у випадку б) і при $m = 1$ у випадку граничних умов а).

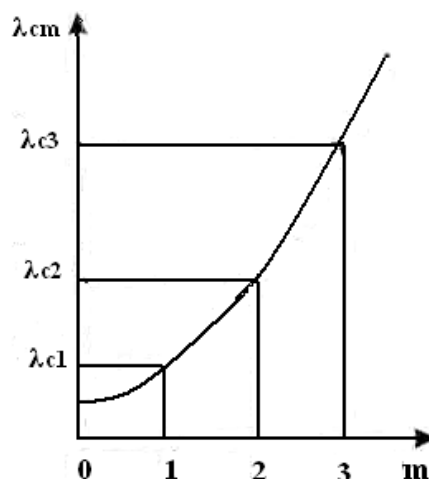


Рис. 5.2. Критичні значення зовнішнього параметра для періодичних у часі біфуркацій

Біфуркація в стаціонарний неоднорідний стан відбувається, якщо величини p_{\pm} дійсні і одне із значень дорівнює нулю. Позначимо біфуркаційне значення λ для цього випадку через λ_{scm} . Нестійкість при дійсних p_{\pm} має місце, якщо

$$(a_m + b_m)^2 - 4A^2\lambda > (a_m - b_m)^2,$$

або з урахуванням (5.21), (5.22) за умови

$$\lambda > 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2 d^2}{D_2 \pi^2 m^2} + D_1 \frac{\pi^2 m^2}{d^2}. \quad (5.28)$$

Критичне значення параметра при біфуркації стаціонарних розв'язків визначається формулою

$$\lambda_{scm} = 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2 d^2}{D_2 \pi^2 m^2} + D_1 \frac{\pi^2 m^2}{d^2}.$$

Залежність λ_{scm} від m зображена на рис. 5.3. Найнижче значення $m = m_c$ досягається при $m \neq 0$. Це означає, що в даній точці нестійкою стає неоднорідна мода і система повинна перейти в неоднорідний стан. В який стан перейде система при збільшенні параметра λ – автоколивальний чи просторово-неоднорідний – залежить від параметрів системи.

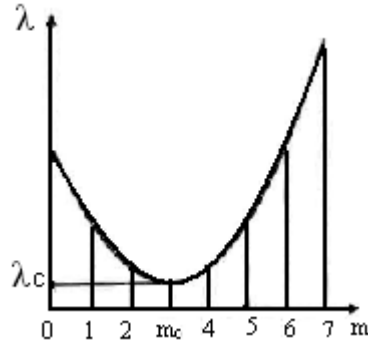


Рис. 5.3. Критичне значення зовнішнього параметра для просторових біфуркацій

Перша біфуркація визначається найнижчим значенням з двох величин λ_{icm} або λ_{scm}

У подальшому нам потрібний буде спряжений розв'язок системи (5.18)

$$\tilde{L}^+ \vec{v}^* = p \vec{v}^*, \quad (5.29)$$

де згідно з (5.17)

$$\tilde{L}^+ = \begin{pmatrix} \lambda - 1 + D_1 \frac{d^2}{dz^2} & -\lambda \\ A^2 & D_2 \frac{d^2}{dz^2} - A^2 \end{pmatrix}, \quad (5.30)$$

а власні значення прямої та спряженої задачі є однаковими.

У разі відсутності потоків на межі

$$\mathbf{v}_m^* = \mathbf{v}_m^{0*} \sin \frac{\pi m z}{d}, \quad (5.31)$$

$$\frac{v_{2m}^{0*}}{v_{1m}^{0*}} = \frac{\lambda - 1 - D_1 \frac{\pi^2 m^2}{d^2}}{\lambda}.$$

Проаналізуємо розв'язок вихідної системи рівнянь (5.11), (5.12) при параметрах, що перевищують поріг виникнення нестійкості (тобто, коли повинні виникати автоколивання або неоднорідності). Розглянемо випадок біфуркації стаціонарних структур. Застосуємо метод, викладений в підрозділі 1.8.

Оператор \tilde{L} можна представити у вигляді двох доданків

$$\vec{L} = \vec{L}_c + (\vec{L} - \vec{L}_c),$$

де \vec{L}_c оператор \vec{L} у точці біфуркації

$$\vec{L}_c = \begin{pmatrix} \lambda_c - 1 + D_1 \frac{d^2}{dz^2} & -A^2 \\ \lambda_c & D_2 \frac{d^2}{dz^2} - A^2 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Представимо X_1 і X_2 у вигляді (5.15) (проте x_1 і x_2 не будемо вважати малими величинами). Тоді для стаціонарного розв'язку з (5.11) і (5.12) впливає

$$\vec{L}_c \mathbf{x} = \mathbf{q}, \quad (5.33)$$

де

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -q \\ q \end{pmatrix},$$

$$q = (\lambda - \lambda_c) x_1 + 2Ax_1 x_2 + \frac{\lambda}{A} x_1^2 + x_1^2 x_2.$$

(5.34)

Згідно з підрозділом 1.8 шукаємо розв'язок (5.33) у вигляді

$$x_i = \varepsilon x_{i1} + \varepsilon^2 x_{i2} + \varepsilon^3 x_{i3} + \dots, \quad (5.35)$$

де $i = 1, 2$,

$$\lambda - \lambda_c = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad (5.36)$$

$$q = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots$$

Враховуючи (5.34), (5.35), знаходимо

$$q_1 = 0,$$

$$q_2 = \lambda_1 x_{11} + 2Ax_{11} x_{21} + \frac{\lambda_c}{A} x_{11}^2, \quad (5.37)$$

$$q_3 = \lambda_2 x_{11} + \lambda_1 x_{12} + 2Ax_{11} x_{22} + 2Ax_{12} x_{21} + 2\frac{\lambda_c}{A} x_{11} x_{22} + x_{11}^2 x_{21}.$$

Вихідна система рівнянь (5.33) набуває вигляду:

$$\vec{L}_c \begin{vmatrix} \sum_n \varepsilon^n x_{1n} \\ \sum_n \varepsilon^n x_{2n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sum_n \varepsilon^n q_{1n} \\ \sum_n \varepsilon^n q_{2n} \end{vmatrix}. \quad (5.38)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , отримаємо систему рівнянь

$$\vec{L}_c \mathbf{x}_n = \mathbf{q}_n. \quad (5.39)$$

Граничні умови до системи мають вигляд

$$x_i(0) = x_i(d) = 0 \quad \text{у випадку а),}$$

$$\left. \frac{dx_i}{dz} \right|_{0,d} = 0 \quad \text{у випадку б).}$$

При $n = 1$ з (5.39) маємо

$$L_c x_{i1} = 0. \quad (5.40)$$

Система (5.40) збігається з системою (5.18) для точки біфуркації ($p = 0$, $\vec{L} = \vec{L}_c$). Тому

$$x_{i1} = u_{im}, \quad i = 1, 2. \quad (5.41)$$

Рівняння (5.39) для визначення x_{1n} при $n > 1$ є неоднорідним. Згідно альтернативою Фредгольма розв'язок існує, якщо права частина ортогональна власному вектору оператора \vec{L}_c , тобто v_m^* (формула (5.31)). Враховуючи (5.31), отримаємо умову:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \int_0^d dz q_n \sin \frac{\pi m z}{d} = 0, \\ \text{б)} \quad & \int_0^d dz q_n \cos \frac{\pi m z}{d} = 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Розглянемо випадок фіксованих граничних умов а). Підставляючи в (5.42) q_n для $n = 2$ з (5.37), визначаємо

$$\int_0^d dz \sin \frac{\pi m z}{d} \left(\lambda_1 \sin \frac{\pi m z}{d} + 2A u_{2m}^0 \sin^2 \frac{2\pi m z}{d} + \frac{\lambda}{A} u_{1m}^0 \sin^2 \frac{\pi m z}{d} \right) dz = 0.$$

Звідси для непарних значень m випливає, що

$$\lambda_1 = 0 \quad (5.43)$$

Використавши цю рівність, з (5.39) при $n = 2$ отримаємо рівняння для визначення $x_{i2} X_{i2}$. Це рівняння має нетривіальний розв'язок, оскільки при $\lambda_1 = 0$ виконується альтернатива Фредгольма. Потім досліджується рівняння (5.39) при $n = 3$. Застосовуючи альтернативу Фредгольма, визначимо λ_2 . Подальші докладні розрахунки опускаємо. Зауважимо лише, що λ_2 залежить від параметрів системи: A, λ, D_1, D_2, m . Повертаючись до умови (5.36), матимемо:

$$\varepsilon = \pm \left(\frac{\lambda - \lambda_c}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad \text{при } \lambda_2 > 0, \quad (5.44)$$

$$\varepsilon = \pm \left(\frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_2} \right)^{1/2} \quad \text{при } \lambda_2 < 0, \quad (5.45)$$

Якщо відхилення параметра системи λ від критичного значення є невеликим ($\lambda \approx \lambda_c$), то для описування поведінки системи досить обмежитися в (5.34) першим членом розкладу по ε . Тоді згідно з (5.34) і (5.41) $x = \varepsilon u_m$ і,

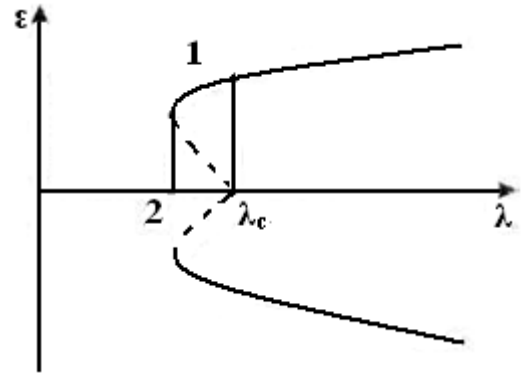


Рис. 5.5. Залежність амплітуди від зовнішнього параметра для підкритичної біфуркації

отже, ε є амплітудою, що характеризує неоднорідність за порогом нестійкості.

Залежність ε від λ зображена на рис. 5.4 і рис. 5.5 для $\lambda_2 > 0$ і $\lambda_2 < 0$. У першому випадку має місце надкритична біфуркація. В цьому разі при $\lambda < \lambda_c$ система однорідна, при $\lambda > \lambda_c$ однорідний розв'язок є нестійким і утворюється неоднорідний стан, амплітуда неоднорідності зростає при збільшенні параметра за кореневим законом (5.44). У випадку підкритичної біфуркації ($\lambda_2 < 0$, рис. 5.5) система в точці біфуркації стрибкоподібно

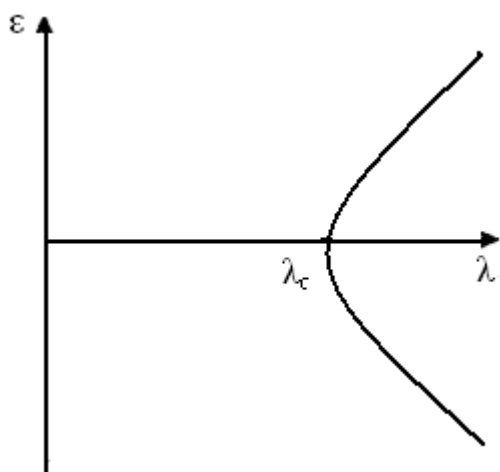


Рис. 5.4. Залежність амплітуди від зовнішнього параметра для надкритичної біфуркації

переходить з однорідного стану в стан зі скінченним значенням амплітуди (точка 1 на рис. 5.5). При зменшенні параметра λ в області $\lambda > \lambda_c$ перехід в однорідний стан відбувається стрибкоподібно в точку 2, тобто переходи при зростанні і спаданні параметра відбуваються при

різних значеннях параметра і має місце явище, аналогічне явищу гістерезису в феромагнетиках.

Дослідження вихідних рівнянь (5.11), (5.12) показує, що при збільшенні параметра λ з'являються вторинні біфуркації, при яких утворюються складніші неоднорідні структури. При $\lambda > \lambda_c$ можливе існування кількох розв'язків нелінійних рівнянь, деякі з яких можуть бути стійкими. Реалізація того чи іншого розв'язку залежить від способу збудження системи.

Подібним методом можна дослідити біфуркацію періодичних у часі структур в моделі «брюсселятор».

5.3. Ефект Бенара

Ефект Бенара є одним з яскравих явищ самоорганізації в нерівноважних системах. Явище спостерігається в посудині, в якій нижня і верхня частини підтримуються при різних температурах, причому нижня частина є більш нагрітою (див. рис. 1). Усередині рідини виникає градієнт температури. При малих градієнтах передача тепла всередині рідини від нижньої частини до верхньої відбувається внаслідок процесів теплопровідності. Тобто, молекули нижнього, більш нагрітого шару проникають у верхній, передаючи енергію його молекулам, і, навпаки, молекули зверхньої області проникають в нижні шари, забираючи енергію від його молекул. Макроскопічний рух рідини в цьому разі не спостерігається. Якщо градієнт

температур перевищує деяке критичне значення, починається процес конвекції, при якому відбувається макроскопічний рух рідини: нижні, більш нагріті області, в яких рідина має меншу густину, і верхні рухаються в різних напрямках. Цей рух відбувається впорядковано (див. рис. 1, б): утворюються гексагональні комірки (див. рис. 2), в центрі яких рідина рухається вгору, а на межах комірок – униз. Таким чином, у системі при певному значенні відхилення від рівноваги виникає структура і симетрія системи стає нижчою порівняно з однорідною системою. Причому, це зниження симетрії не пов'язане з симетрією зовнішнього впливу (зовнішнє збурення – підігрів системи знизу – в даному разі є однорідним в площині нижньої межі рідини), а визначається внутрішніми властивостями системи, величиною зовнішнього збурення. Відбувається самоорганізація системи, яка пов'язана з формуванням структури більш складної, ніж вихідна.

Для кількісного дослідження ефекту будемо характеризувати рідину полем швидкостей $v(r, t)$ і температурою $T(r, t)$. Основними рівняннями, що описують рідину, є такі:

1. Рівняння Нав'є-Стокса

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \rho F_i - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \quad (5.46)$$

де тензор тиску визначається формулою

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}, \quad (5.47)$$

$$p_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \eta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (5.48)$$

p – тиск, η – в'язкість, \mathbf{F} – сила тяжіння. Спрямуємо вісь z перпендикулярно до поверхні рідини в напрямку, протилежному силі тяжіння. Тоді $F_x = F_y = 0, F_z = -g$.

2. Рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) = 0. \quad (5.49)$$

3. Рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \chi \Delta T, \quad (5.50)$$

де χ – коефіцієнт теплопровідності.

Граничні умови мають такий вигляд:

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (5.51)$$

$$T = T_1 \quad \text{при} \quad z = h, \quad (5.52)$$

$$v_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, h, \quad (5.53)$$

де h – товщина шару рідини.

Окрім цих умов розв'язки повинні задовольняти граничним умовам для v_x, v_y при $z = 0, h$. Вигляд цих умов залежить від поверхонь, що обмежують систему (вільні поверхні, тверді тощо), і він буде визначений пізніше.

Будемо вважати, що рідина є нестисливою і покладатимемо величину ρ сталою величиною скрізь, за винятком одного доданка, в який входить добуток $\rho \mathbf{F}$. У цьому члені залежність ρ від температури (а отже, від координат) є принципово важливою для пояснення ефекту Бенара. Саме цей доданок описує взаємозв'язок між густиною рідини і силою тяжіння, внаслідок чого відбувається виштовхування більш нагрітої рідини в полі тяжіння. Після врахування вище вказаних наближень рівняння (5.46) і (5.49) мають вигляд

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0} \right) F_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i, \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \equiv \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (5.55)$$

де $\delta \rho = \rho - \rho_0$ – середнє значення густини; $\nu = \eta / \rho_0$.

У малій температурній області залежність густини від температури може бути апроксимована формулою

$$\delta\rho = -\rho_0\alpha(T - T_1). \quad (5.56)$$

Стаціонарний розв'язок рівнянь (5.50), (5.54), (5.55) для температури $T_0(z)$, швидкості \mathbf{v} і тиску $p_0(z)$ має вигляд

$$T_0(z) = T_1 - \beta z, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{v} = 0,$$

(5.58)

$$p_0(z) = h_1 - \rho_0 g z - \frac{1}{2} \alpha \beta g z^2, \quad (5.59)$$

$$\text{де } \beta = \frac{T_1 - T_2}{h} = \frac{\Delta T}{h}$$

5.3.1. Визначення порогу ефекту Бенара

Дослідимо стійкість стаціонарного розв'язку (5.57)–(5.59). Розглянемо малі флуктуації температури, швидкості й тиску:

$$T = T_0(z) + \theta = T_1 - \beta z + \theta, \quad (5.60)$$

$$p = p_0 + \delta p. \quad (5.61)$$

Оскільки швидкість у стаціонарному випадку дорівнює нулю, вона сама і є малою величиною.

Підставивши (5.60), (5.61) у вихідні рівняння (5.54) і (5.50), з точністю до лінійних доданків отримаємо

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \alpha \theta g \mathbf{e} - \vec{\nabla} \frac{p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \beta v_j e_j = \chi \Delta \theta, \quad (5.63)$$

де $\mathbf{e} = (0, 0, 1)$.

Діятимемо на ліву і праву частини (5.62) оператором rot rot , а також використаємо векторні співвідношення

$$\text{rot rot}\mathbf{A} = \text{grad div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

$$\text{rot grad}\varphi \equiv 0.$$

Тоді згідно з (5.55) матимемо

$$\text{rot rot}\mathbf{v} = \text{grad div}\mathbf{v} - \Delta\mathbf{v} = -\Delta\mathbf{v}.$$

Аналогічно

$$\begin{aligned} \text{rot rot}\theta\mathbf{e} &= \text{grad div}\theta\mathbf{e} - \Delta\theta\mathbf{e} = \\ \text{grad}(\text{grad}\theta \cdot \mathbf{e}) - \Delta\theta\mathbf{e} &= \text{grad}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \Delta\theta\mathbf{e} = \\ &= \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\mathbf{k} - \Delta\theta\mathbf{e}. \end{aligned}$$

Використавши останню рівність, для рівняння (5.62) дістанемо

$$\frac{\partial\Delta\mathbf{v}}{\partial t} = v\Delta\Delta\mathbf{v} - \alpha g \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\mathbf{k} - \Delta\theta\mathbf{e} \right). \quad (5.64)$$

Розглянемо проекцію рівняння (5.64) на вісь Z .

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta v_z = v\Delta\Delta v_z + \alpha g \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} \right), \quad (5.65)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \beta v_z = \chi\Delta\theta. \quad (5.66)$$

Шукаємо розв'язок (5.65), (5.66) у вигляді

$$v_z = v_z^0(z)\exp(ik_x x + ik_y y + pt), \quad (5.67)$$

$$\theta = \theta^0(z)\exp(ik_x x + ik_y y + pt)$$

Після підстановки (5.67) в (5.65), (5.66) отримаємо

$$p \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right) v_z^0 = v \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right)^2 v_z^0 - \alpha g k_{\perp}^2 \theta^0 \quad (5.68)$$

$$p\theta^0 = \beta v_z^0 + \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right) \theta^0, \quad (5.69)$$

де $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$,

При $p < 0$ розв'язок (5.67) є стійкий, при $p > 0$ – нестійкий. Отже, біфуркаційні умови визначаються значеннями параметрів, при яких система (5.68), (5.69) з відповідними граничними умовами має власне значення $p = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right)^2 v_z^0 - \alpha g k_{\perp}^2 \theta^0 &= 0, \\ \beta v_z^0 + \chi \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right) \theta^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Виключаючи з цих рівнянь θ^0 , матимемо рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\perp}^2 \right)^3 v_z^0 = -R \frac{k_{\perp}^2}{h^4} v_z^0, \quad (5.71)$$

де $R = \frac{\alpha g \Delta T}{\chi \nu} h^3$ – число Релея.

Шукаємо розв'язок (5.71) у вигляді

$$v_z^0 = a \exp(ik_z z). \quad (5.72)$$

Підстановка (5.72) у (5.71) дає таке рівняння для k_{\perp} і k_z

$$(-k_z^2 - k_{\perp}^2) = -R \frac{k_{\perp}^2}{h^4}.$$

Його розв'язок має вигляд

$$k_z^2 = -k_{\perp}^2 - \left(R \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} \exp\left(\frac{2\pi li + \pi i}{3}\right), \quad (5.73)$$

де $l = 0, 1, 2$.

Або докладніше

$$k_{z1\pm} = \pm \sqrt{\left(R \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} - k_{\perp}^2}, \quad (5.74)$$

$$k_{z2\pm} = k_{z3\pm} = \pm i \sqrt{k_{\perp}^2 + \left(R \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} (1 + i\sqrt{3})} / 2. \quad (5.75)$$

Загальний розв'язок представляється у вигляді суперпозиції частинних розв'язків з різними значеннями k_z

$$v_z^0 = \sum_{i,\pm} a_{i\pm} \exp(ik_{zi\pm}z). \quad (5.76)$$

Коефіцієнти $a_{i\pm}$ визначаються з граничних умов.

Розглянемо випадок вільних граничних поверхонь. На вільній поверхні крім умови (5.53) дорівнюють нулю компоненти тензора тиску P_{xz} і P_{yz} .

Оскільки на поверхні $v_z = 0$, то

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0. \quad (5.77)$$

Продиференціювавши рівняння неперервності (5.55) по z , матимемо

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0.$$

Використавши (5.77), отримаємо

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = 0, h. \quad (5.78)$$

Після підстановки (5.76) у граничні умови (5.53) і (5.78) можемо записати

$$a_{1+} = -a_{1-} = a_1, a_{2\pm} = a_{3\pm} = 0, \quad k_{z1} = \frac{\pi m}{h}, \quad (5.79)$$

де

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Отже,

$$v_z^0 = a_1 \sin k_{z1}z = a_1 \sin \frac{\pi m z}{h}. \quad (5.80)$$

З умов (5.74) та (5.79) отримаємо рівняння для k_{\perp}

$$h^2 \left[\left(R \frac{k_{\perp}^2}{h^4} \right)^{1/3} - k_{\perp}^2 \right] = \pi^2 m^2. \quad (5.81)$$

Найнижче значення числа Релея (тобто найнижче порогове значення ΔT) реалізується при $m = 1$. У цьому разі з (5.81) маємо

$$R = \frac{h^4}{k_{\perp}^2} \left(\frac{\pi^2}{h^2} + k_{\perp}^2 \right)^3.$$

Найнижче (критичне) значення $R = R_c$ дістанемо з умови мінімуму цієї функції

$$\frac{dR}{dk_{\perp}} = 0. \quad (5.82)$$

Використавши цю умову, знайдемо найменші значення $k_{\perp} = k_{\perp c}$ і R_c

$$k_{\perp c} = \frac{\pi}{h\sqrt{2}}, \quad (5.83)$$

$$R_c = \frac{27}{4} \pi^4 = 6575. \quad (5.84)$$

Таким чином, ми показали нестійкість системи при збільшенні різниці температур на поверхнях відносно утворення періодичного розподілу швидкостей. Період розподілу в просторі визначається через $k_{\perp c}$ і дорівнює $2\pi/k_{\perp c}$. Виявилось, система є нестабільною відносно наростання мод, у яких проекція хвильового вектора в площині XY задовольняє умові $k_{\perp} = k_{\perp c}$, проте в лінійанізованому підході ми не можемо визначити характер структури, що виникає за порогом нестабільності. Такими структурами можуть бути циліндричні хвилі, комірки Бенара, наведені на рис. 2, тощо.

Аналогічні розрахунки для твердих поверхонь при граничних умовах $v_x = v_y = 0$ для числа Релея дають $R = 1707,8$.

5.3.2. Запороговий режим в ефекті Бенара

Виконаний аналіз, який ґрунтується на лінійанізації основних рівнянь, дав можливість визначити поріг нестійкості термодинамічної гілки, проте не описує систему при параметрах, більших за їхні порогові значення (у запороговому режимі). Отримані результати свідчать, що мода з періодичним

розподілом швидкостей і температури, яка описується співвідношеннями (5.67), (5.80), (5.83), зростатиме в часі. Проте до якої величини зросте амплітуда цієї моди, чи буде розв'язок з періодичним розподілом параметрів стійким, залишаються нез'ясованими. Для визначення швидкості рідини і температури за порогом нестійкості потрібно розв'язувати нелінійну систему рівнянь (5.46)–(5.50), що є складною задачею. Однак при малих відхиленнях зовнішнього параметра від критичного значення (у даній задачі відхилення ΔT від ΔT_c) розв'язок за порогом нестійкості можна наближено описати обмеженим числом мод (в окремому випадку – однією), амплітуди яких максимально зростають в околі порогових значень зовнішнього параметра. У такий спосіб за Лоренцем [72] розглянемо, обмежившись малим числом мод, задачу Бенара. Крім того, для спрощення візьмемо розв'язки трансляційно інваріантні відносно y , тобто будемо вважати, що \mathbf{v} і T залежать лише від x та z і не залежать від y . Це відповідає випадку, коли за порогом нестійкості виникають не шестигранники, а вали. Введемо такі позначення

$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (5.85)$$

Таким чином введена швидкість автоматично задовольняє рівнянню (5.55). Після підстановки (5.85) у рівняння (5.50), (5.54), враховуючи (5.56), матимемо

$$\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = \alpha g \frac{\partial \theta}{\partial x} + \nu \Delta \Delta \varphi, \quad (5.86)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \beta = \chi \Delta \theta. \quad (5.87)$$

Для вільних границь мають місце такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \theta(0,0,t) = \theta(0,h,0) = \varphi(0,0,t) = \varphi(0,h,t) = \Delta \varphi(0,0,t) = \\ = \Delta \varphi(0,h,t) = 0 \end{aligned} \quad (5.88)$$

Представимо розв'язок рівнянь (5.86), (5.87) у вигляді суперпозиції розв'язків (5.76), (5.80) з найменшими значеннями m

$$\varphi = \frac{\chi(1+a^2)\sqrt{2}}{a} X \sin kx \sin \frac{\pi z}{h}, \quad (5.89)$$

$$\theta = \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \sqrt{2} Y \cos kx \sin \frac{\pi z}{h} - Z \sin \frac{2\pi z}{h}, \quad (5.89)$$

де залежності X, Y, Z від часу визначаються з такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= -XZ + \lambda X - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Точкою позначена похідна по безрозмірному часу $\tau = \pi^2 h^{-2} (1+a^2) \chi t$,

$\sigma = v/\chi, b = 4(1+a^2)^{-1}, \lambda = \frac{R}{R_c} \approx \Delta T$ – зовнішній параметр; $a = kh/\pi$.

Стационарними точками системи (5.90) є

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= Y^{(1)} = Z^{(1)} = 0, \\ X^{(2,3)} &= Y^{(2,3)} = \pm b\sqrt{\lambda-1}, Z^{(2,3)} = \lambda-1. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Дослідження на стійкість показують, що в околі особливої точки $\mathbf{X}^{(1)} = 0$ декременти наростання флуктуацій такі:

$$p_{1,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma+1)^2 + 4(\lambda-1)\sigma}, p_3 = -b. \quad (5.92)$$

З (5.92) випливає, що всі $p_i (i=1,2,3) < 0$ при $0 < \lambda < 1$, отже, особлива точка $\mathbf{X}^{(1)} = 0$ є стійкою в цій області λ . При $\lambda = 1$ виникає нестійкість Бенара. При $1 < \lambda < \lambda_1$ з'являються два граничних цикли. В області $\lambda_1 < \lambda < \lambda_c$, де $\lambda_c = \delta \frac{\alpha+b+3}{\delta-b-1}$, граничні цикли є стійкими. При $\lambda > \lambda_c$ граничні цикли стають нестійкими і виникає хаотичний рух, про що йтиметься в розділі 9.